直角ノルムを用いたファジィ多目的配置問題の局所有効解の特徴付け (不確実な状況における意思決定の理論と応用)

金, 正道

数理解析研究所講究録
第 1589 巻 2008 年 167-175

直角ノルムを用いたファジィ多目的配置問題の局所有効解の特徴付け

弘前大学 大学院 理工学研究科　　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要 平面における直角ノルムを用いたファジィ多目的配置問題を考え、その有効解および局所有効解のいくつかの性質を導き、局所有効解の特徴付けを与える。そのような特徴付けを用いるとすべての局所有効解を容易に求めることができる。

1. 準備 連続型配置モデルは、一般に需要点とよばれる $\mathbb{R}^2$ の点の有限集合が与えられていると仮定される。需要点は既存の施設または顧客の位置をモデル化したものである。$\boldsymbol{d}_i \equiv (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \cdots, n(\geq 2)$ を相異なる需要点とし、$I \equiv \{1, 2, \cdots, n\}$, $D \equiv \{\boldsymbol{d}_i\text{: } i \in I\}$ とする。このとき、新たに単一の施設を $\mathbb{R}^2$ に配置する問題は、単一施設配置問題とよばれる。各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましいならば、それは各需要点から施設までの距離を含む関数の最小化問題として次のように定式化される。

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2} f(\gamma_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1), \gamma_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2), \cdots, \gamma_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_n))$$

ここで、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ は施設の位置を表す変数である。f は通常 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への非減少凸関数または任意の $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$ となるような $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への関数と仮定される。各 $i \in I$ に対して、$\gamma_i\text{: } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は通常ノルムやゲージと仮定され、$\gamma_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i)$ は $\boldsymbol{d}_i$ から $\boldsymbol{x}$ までの距離を表す。本稿では、すべての $\gamma_i, i \in I$ は同一の直角ノルム $\|\cdot\|_1$ と仮定する。ゲージに関しては、例えば [2, 5] 参照。このとき、**多目的配置問題 (multicriteria location problem, MCP)** は次のように定式化される。

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \equiv (\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1\|_1, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2\|_1, \cdots, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_n\|_1)$$

例えば、[1,4,6] において多目的配置問題が扱われている。

定義 1

(i) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ が存在しないとき MCP の**有効解 (efficient solution)** とよばれる。MCP のすべての有効解の集合を $\mathrm{E}(D)$ とする。

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ が存在しないとき MCP の**狭義有効解 (strictly efficient solution)** とよばれる。MCP のすべての狭義有効解の集合を $\mathrm{SE}(D)$ とする。

(iii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ が MCP の有効解でありかつ狭義有効解でないとき、$\boldsymbol{x}_0$ は MCP の**代替的有効解 (alternately efficient solution)** とよばれる。MCP のすべての代替的有効解

の集合を AE(D) とする。

(iv) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ が存在しないとき MCP の**準有効解 (quasiefficient solution)** とよばれる。MCP のすべての準有効解の集合を QE(D) とする。

定義 1 より、$D \subset \mathrm{SE}(D) \subset \mathrm{E}(D) \subset \mathrm{QE}(D)$ となる。

各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましい場合は、MCP の定式化は自然である。施設のある位置に対して、ある 2 つの需要点から施設までの距離が等しいとしても、それぞれの需要点に関する満足度は異なるかもしれない。また、配置する施設が飛行場ならば、飛行場が需要点に近すぎると騒音のため望ましくないだろう。このような状況も考慮するために、需要点に関する施設の位置に対する満足度を表すメンバーシップ関数を与え、目的関数にメンバーシップ関数を含む最大化問題を考える。メンバーシップ関数 μ_i: $\mathbb{R} \to [0,1] \equiv \{x \in \mathbb{R}\colon 0 \leq x \leq 1\}, i \in I$ が与えられていると仮定する。施設の各位置 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ と $i \in I$ に対して、$\mu_i(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|_1)$ は需要点 $\boldsymbol{d}_i$ に関する施設の位置 $\boldsymbol{x}$ に対する満足度を表す。本稿では、各 $\mu_i, i \in I$ に対して次を仮定する。

- $x < 0$ に対して $\mu_i(x) = 0$ である。
- ある $m_i \geq 0$ が存在して $\mu_i(m_i) = 1$ となる。
- μ_i は $[0, m_i]$ 上では狭義単調増加であり、$[m_i, \infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq m_i\}$ 上では狭義単調減少である。

このとき、**ファジィ多目的配置問題 (fuzzy multicriteria location problem, FMCP)** は次のように定式化される。

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) \equiv (\mu_1(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1\|_1), \mu_2(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2\|_1), \cdots, \mu_n(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_n\|_1))$$

例えば、[3] においてファジィ多目的配置問題が扱われている。

定義 2

(i) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ が存在しないとき FMCP の**有効解 (efficient solution)** とよばれる。FMCP のすべての有効解の集合を FE(D) とする。

点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ は、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in N_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ が存在しないとき FMCP の**局所有効解 (locally efficient solution)** とよばれる。ここで、$N_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0) \equiv \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0\|_2 < \varepsilon\}$ であり、$\|\cdot\|_2$ はユークリッドノルムである。FMCP のすべての局所有効解の集合を FLE(D) とする。

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ が存在しないとき FMCP の**狭義有効解 (strictly efficient solution)** とよばれる。FMCP のすべての狭義有効解の集合を FSE(D) とする。

点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ は、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in N_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ が存在しないとき FMCP の**局所狭義有効解 (locally strictly efficient solution)** とよばれる。FMCP のすべての局所狭義有効解の集合を FLSE(D) とする。

(iii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ が FMCP の有効解でありかつ狭義有効解でないとき、$\boldsymbol{x}_0$ は FMCP の**代替的有効解 (alternately efficient solution)** とよばれる。FMCP のすべての代替的有効解の集合を FAE(D) とする。

点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ が FMCP の局所有効解でありかつ局所狭義有効解でないとき、$\boldsymbol{x}_0$ は FMCP の**局所代替的有効解 (locally alternately efficient solution)** とよばれる。FMCP のすべての局所代替的有効解の集合を FLAE(D) とする。

(iv) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ が存在しないとき FMCP の**準有効解 (quasiefficient solution)** とよばれる。FMCP のすべての準有効解の集合を FQE(D) とする。

点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ は、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in N_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ が存在しないとき FMCP の**局所準有効解 (locally quasiefficient solution)** とよばれる。FMCP のすべての局所準有効解の集合を FLQE(D) とする。

定義 2 より、FSE(D) $\subset$ FE(D) $\subset$ FQE(D), FLSE(D) $\subset$ FLE(D) $\subset$ FLQE(D) となる。

本稿では、平面における直角ノルムを用いたファジィ多目的配置問題を考え、その有効解および局所有効解のいくつかの性質を導き、局所有効解の特徴付けを与える。そのような特徴付けを用いるとすべての局所有効解を容易に求めることができる。

2. FMCP の有効解と局所有効解 本節では、ファジィ多目的配置問題 FMCP の有効解および局所有効解のいくつかの性質を与える。

まず、いくつか記号を準備する。各 $r \geq 0$ と $i \in I$ に対して

$$B_i(r) \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|_1 \leq r\}$$

とし、$B_i^0(r)$ および $\partial B_i(r)$ をそれぞれ $B_i(r)$ の内部および境界とし

$$B \equiv \bigcup_{i \in I} B_i(m_i)$$

とする。

命題 1 すべての $\mu_i, i \in I$ は $[0, \infty)$ 上で上半連続であるとする。このとき、ファジィ多目的配置問題 FMCP の有効解が存在する。すなわち、FE(D) $\neq \emptyset$ となる。

命題 2 もし、$m_i = 0, i \in I$ ならば次が成り立つ。

(i) FLE(D) = FE(D) = E(D)

(ii) FLSE(D) = FSE(D) = SE(D)

(iii) FLAE(D) = FAE(D) = AE(D)

(iv) FLQE(D) = FQE(D) = QE(D)

命題 3 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して、$\boldsymbol{x} \notin B$ ならば次が成り立つ。

(i) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLE}(D) \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} \in \mathrm{FE}(D) \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} \in \mathrm{E}(D)$

(ii) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLSE}(D) \overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{x} \in \mathrm{FSE}(D) \overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{x} \in \mathrm{SE}(D)$

(iii) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLAE}(D) \overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{x} \in \mathrm{FAE}(D) \overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{x} \in \mathrm{AE}(D)$

(iv) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLQE}(D) \overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{x} \in \mathrm{FQE}(D) \overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{x} \in \mathrm{QE}(D)$

$\mathrm{E}(D), \mathrm{SE}(D), \mathrm{AE}(D)$ は [1, 4] において提案されているアルゴリズムを用いて求めることができ、[4] の Proposition 2 より $\mathrm{QE}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\text{: } \min\{a_i\text{: } i \in I\} \leq x \leq \max\{a_i\text{: } i \in I\}, \min\{b_i\text{: } i \in I\} \leq y \leq \max\{b_i\text{: } i \in I\}\}$ となる。$\boldsymbol{x} \in B$ のとき、$\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLE}(D) \subset \mathrm{FLQE}(D)$ であっても $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FE}(D)$ にも $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FQE}(D)$ にもなるとは限らない。

3. FMCP の局所有効解と summary diagrams 本節では、summary diagram の概念を導入し、ファジィ多目的配置問題 FMCP の局所有効解の特徴付けを与える。そのような特徴付けを用いるとすべての局所有効解を容易に求めることができる。

$\mathbb{R}^2$ の与えられた点が FMCP の局所有効解であるかどうかを判定するために [6] に従って summary diagram を導入する。[6] において、summary diagram は $\mathbb{R}^2$ における one-infinity norm を用いた多目的配置問題に対して導入された概念である。以下で定義する summary diagram は [6] における summary diagram を修正したものである。

$$\begin{aligned} O_1 &\equiv \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \\ O_2 &\equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \\ O_3 &\equiv \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \\ O_4 &\equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\} \end{aligned}$$

$$O_{-j} \equiv -O_j, \qquad j = 1,2,3,4$$

とする。また、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$O_j(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x} + O_j, \qquad j = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$$

とする。

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \notin D$ とする。

$$I_1 \equiv \{i \in I : \boldsymbol{x} \in B_i(m_i)\}, \qquad I_2 \equiv \{i \in I : \boldsymbol{x} \in (B_i^0(m_i))^c\}$$

とし

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv \{j \in \{\pm2, \pm4\} : \boldsymbol{x} \in O_j(\boldsymbol{d}_i) \text{ for some } i \in I_1\}, \\ J_2 &\equiv -\{j \in \{\pm2, \pm4\} : \boldsymbol{x} \in \overline{O}_j(\boldsymbol{d}_i) \text{ for some } i \in I_2\}, \\ J_3 &\equiv -\{j \in \{\pm1, \pm3\} : \boldsymbol{x} \in O_j(\boldsymbol{d}_i) \text{ for some } i \in I_1\} \end{aligned}$$

とする。ここで、$(B_i^0(m_i))^c$ は $B_i^0(m_i)$ の補集合であり、$\overline{O}_j(\boldsymbol{d}_i)$ は $O_j(\boldsymbol{d}_i)$ の閉包である。このとき、$\mathrm{SD}(\boldsymbol{x}) \equiv J_1 \cup J_2 \cup J_3$ を $\boldsymbol{x}$ の **summary diagram** という。わかり易いように $\boldsymbol{x}$ の summary diagram を次のように図示する。まず、$\boldsymbol{v}_1 \equiv (1,0), \boldsymbol{v}_2 \equiv (1,1), \boldsymbol{v}_3 \equiv (0,1), \boldsymbol{v}_4 \equiv (-1,1)$ とし、$\boldsymbol{v}_{-j} \equiv -\boldsymbol{v}_j, j = 1,2,3,4$ とする。$j \in \mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のとき、点 $\boldsymbol{v}_j$

のところにマル印を描くことにする。例えば、$\boldsymbol{d}_1 = (1,5), \boldsymbol{d}_2 = (3,3), \boldsymbol{d}_3 = (4,0), \boldsymbol{d}_4 = (0,1), \boldsymbol{x} = (0,3), m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = m_4 = 2$ のとき、$\mathrm{SD}(\boldsymbol{x}) = \{-4,-3,-2,1,2\}$ となり、これを図示したものが図 1 に示されている。

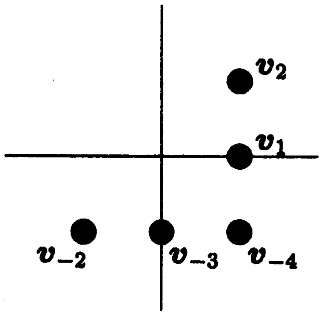
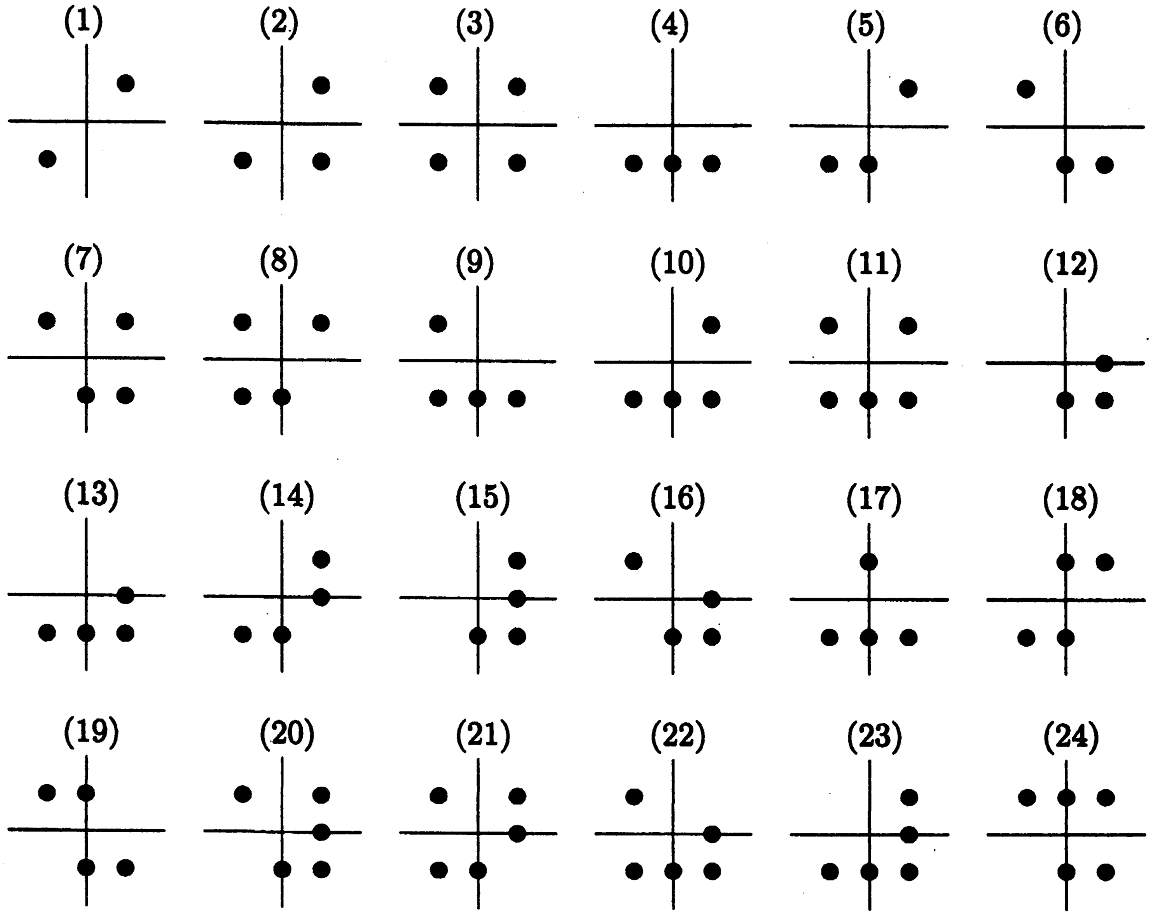


図 1　$\mathrm{SD}(\boldsymbol{x}) = \{-4,-3,-2,1,2\}$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \notin D$ の summary diagram $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ を図 1 のように図示したものを $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンとよび、回転移動によって一致するパターンは同一視する。図 2 に示されている $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンは $\boldsymbol{x}$ が FMCP の局所有効解であるかどうかを調べる時に重要なパターンである。



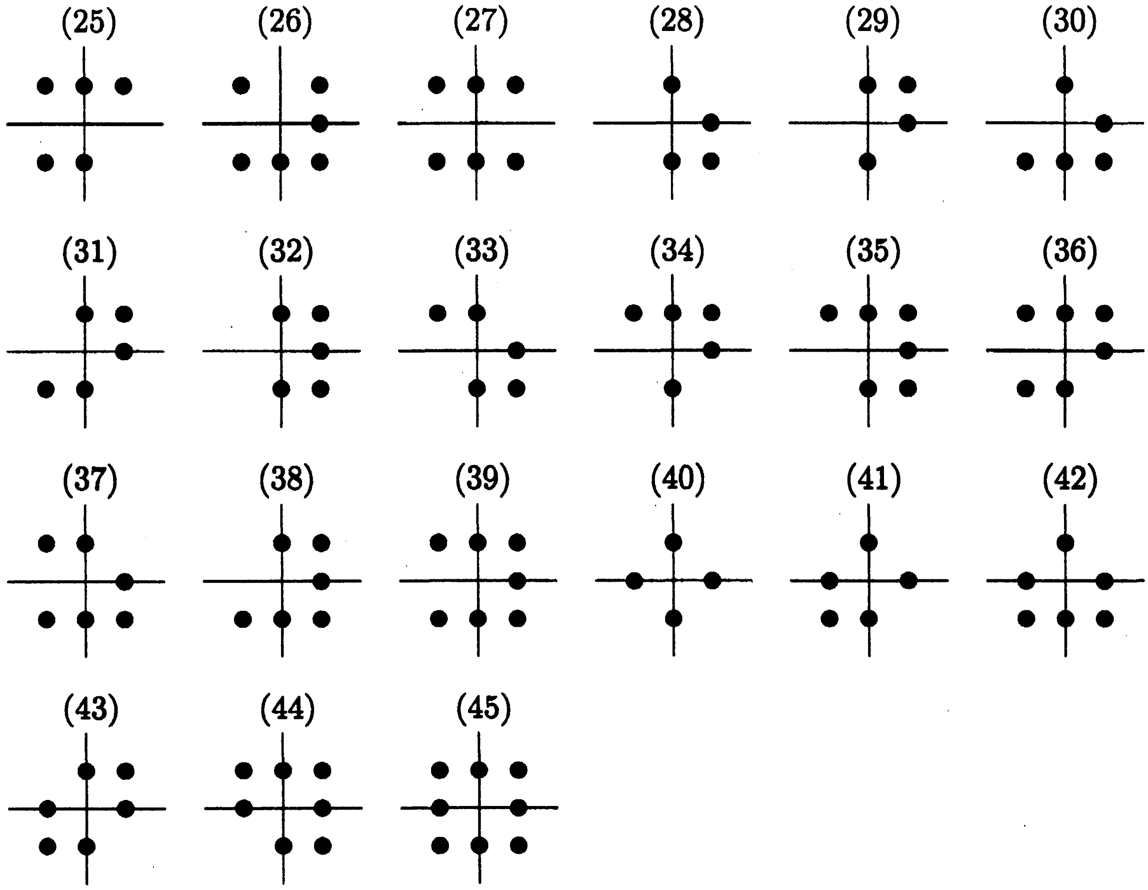


図 2　summary diagram のパターン

命題 4　点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \notin D$ とする。$\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLQE}(D)$ となるための必要十分条件は $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンが図 2 (1)〜(45) のいずれかのパターンに一致することである。$\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンが図 2 (1)〜(45) のいずれかのパターンに一致するならば次が成り立つ。ただし、$\boldsymbol{d}_i, i \in I$ は $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンに一致するように $\boldsymbol{x}$ に関して回転移動されているとする。

(i) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLSE}(D)$ となるための必要十分条件は $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンが図 2 (3), (11), (26), (27), (39), (45) のいずれかのパターンと一致することである。

(ii) $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンが図 2 (1) と一致するならば $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLAE}(D)$ となる。

(iii) $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンが図 2 (5)〜(8), (12)〜(22), (24), (25), (28)〜(38), (40)〜(44) のいずれかのパターンに一致するならば $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLQE}(D) \setminus \mathrm{FLE}(D)$ となる。

(iv) $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンが図 2 (2) または (10) または (23) と一致しているとする。このとき、ある $\boldsymbol{d}_i, i \in I$ が存在して $\boldsymbol{x} \in (O_4(\boldsymbol{d}_i) \setminus B_i(m_i)) \cup (O_{-4}(\boldsymbol{d}_i) \cap B_i^0(m_i))$ ならば $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLQE}(D) \setminus \mathrm{FLE}(D)$ となる。そうでなければ、$\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLAE}(D)$ となる。

(v) $\mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ のパターンが図 2 (4) と一致しているとする。このとき、ある $\boldsymbol{d}_i, i \in I$ が存在して $\boldsymbol{x} \in (O_4(\boldsymbol{d}_i) \setminus B_i(m_i)) \cup (O_{-4}(\boldsymbol{d}_i) \cap B_i^0(m_i)) \cup (O_2(\boldsymbol{d}_i) \setminus B_i(m_i)) \cup (O_{-2}(\boldsymbol{d}_i) \cap B_i^0(m_i))$ ならば $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLQE}(D) \setminus \mathrm{FLE}(D)$ となる。そうでなければ、$\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLAE}(D)$ となる。

(vi) SD($\boldsymbol{x}$) のパターンが図 2 (9) と一致しているとする。このとき、ある $\boldsymbol{d}_i, i \in I$ が存在して $\boldsymbol{x} \in (O_2(\boldsymbol{d}_i) \setminus B_i(m_i)) \cup (O_{-2}(\boldsymbol{d}_i) \cap B_i^0(m_i))$ ならば $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLQE}(D) \setminus \mathrm{FLE}(D)$ となる。そうでなければ、$\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLAE}(D)$ となる。

命題 4 より次の系を得る。

系 1 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \notin D$ に対して、$\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLSE}(D)$ となるための必要十分条件は $\{\pm 2, \pm 4\} \subset \mathrm{SD}(\boldsymbol{x})$ となることである。

命題 5 各 $\boldsymbol{d}_i, i \in I$ に対して、$m_i = 0$ ならば $\boldsymbol{d}_i \in \mathrm{FSE}(D)$ となり、$m_i > 0$ ならば次が成り立つ。

(i) $\boldsymbol{d}_i \in \mathrm{FLSE}(D \setminus \{\boldsymbol{d}_i\}) \Rightarrow \boldsymbol{d}_i \in \mathrm{FLSE}(D)$

(ii) $\boldsymbol{d}_i \in \mathrm{FLAE}(D \setminus \{\boldsymbol{d}_i\}) \Rightarrow \boldsymbol{d}_i \in \mathrm{FLQE}(D) \setminus \mathrm{FLE}(D)$

(iii) $\boldsymbol{d}_i \in \mathrm{FLQE}(D \setminus \{\boldsymbol{d}_i\}) \setminus \mathrm{FLE}(D \setminus \{\boldsymbol{d}_i\}) \Rightarrow \boldsymbol{d}_i \in \mathrm{FLQE}(D) \setminus \mathrm{FLE}(D)$

(iv) $\boldsymbol{d}_i \notin \mathrm{FLQE}(D \setminus \{\boldsymbol{d}_i\}) \Rightarrow \boldsymbol{d}_i \notin \mathrm{FLQE}(D)$

各需要点 $\boldsymbol{d}_i, i \in I$ に対して、$\boldsymbol{d}_i$ を通る $0, \frac{\pi}{2}$ 方向直線を引き、$m_i > 0$ ならば 4 つの線分から成る $\partial B_i(m_i)$ を描く（図 3）。このとき、$\mathbb{R}^2$ は部分領域 (subregion) と辺 (edge) と点 (corner) に分割される。ただし、部分領域は境界を含まないとし、辺は端点を含まない（線分か半直線になる）とし、点は描かれた直線および $\partial B_i(m_i), i \in I$ のうちのいくつかの交点とする。

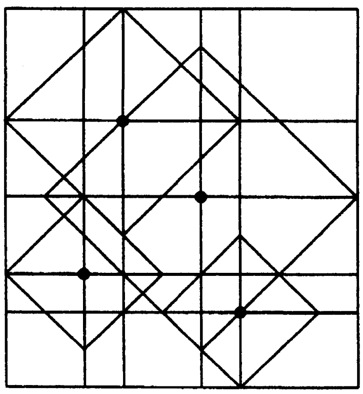


図 3　部分領域, 辺および点（● は需要点）

命題 6 $S \subset \mathbb{R}^2$ を部分領域または辺とし、$\boldsymbol{x} \in S$ とする。このとき、次が成り立つ。

(i) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLE}(D) \Rightarrow S \subset \mathrm{FLE}(D)$

(ii) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLSE}(D) \Rightarrow S \subset \mathrm{FLSE}(D)$

(iii) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLAE}(D) \Rightarrow S \subset \mathrm{FLAE}(D)$

(iv) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{FLQE}(D) \Rightarrow S \subset \mathrm{FLQE}(D)$

数値例 $d_1 = (1,5), d_2 = (3,3), d_3 = (4,0), d_4 = (0,1)$ とし、$m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = m_4 = 2$ であるとき、ファジィ多目的配置問題 FMCP

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} (\mu_1(\|x - d_1\|_1), \mu_2(\|x - d_2\|_1), \mu_3(\|x - d_3\|_1), \mu_4(\|x - d_4\|_1))$$

を考える。ここで、各 $\mu_i, i = 1,2,3,4$ は $\mu_i(x) = 0, x \in (-\infty, 0]$ となり、$\mu_i(m_i) = 1$ となり、$[0, m_i]$ 上で狭義単調増加で $[m_i, \infty)$ 上で狭義単調減少になるような任意の関数である。この FMCP に対して、命題4，5および6を用いてすべての部分領域, 辺および点を調べることによって FMCP のすべての局所有効解が図4のように得られる。

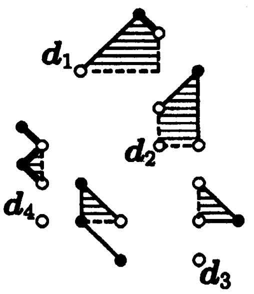


図4-1 FLSE(D)

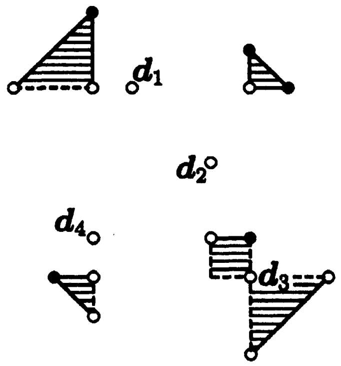


図4-2 FLAE(D)

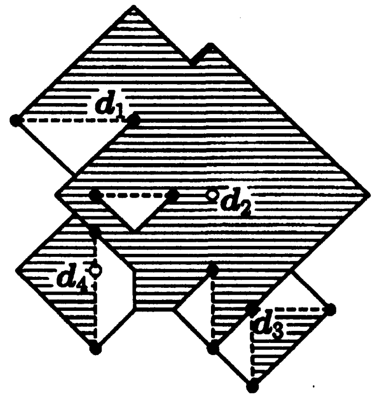


図4-3 FLQE(D)

図4 FMCP の局所有効解

4. 結論 本稿では、平面における直角ノルムを用いたファジィ多目的配置問題 FMCP を考えた。まず、命題1-3として FMCP の有効解および局所有効解の性質を与えた。次に、summary diagram の概念を導入し、命題4として FMCP の局所有効解を summary diagram によって特徴付けた。そのような特徴付けを用いると命題5-6より FMCP のすべての局所有効解を容易に求めることができる。

参考文献

[1] L. G. Chalmet, R. L. Francis and A. Kolen, *Finding efficient solutions for rectilinear distance location problems efficiently*, European Journal of Operational Research, **6**, 1981, 117-124.

[2] J. -B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[3] M. Kon, *On fuzzy multicriteria location problems*, in Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis edited by W. Takahashi and T. Tanaka, Yokohama Publishers, Japan, 2004, 227-232.

[4] B. Pelegrin and F. R. Fernandez, *Determination of efficient points in multiple-objective location problems*, Naval Research Logistics Quarterly, **35**, 1988, 697-705.

[5] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.

[6] J. E. Ward and R. E. Wendell, *Characterizing efficient points in location problems under the one-infinity norm*, in Locational Analysis of Public Facilities edited by J. -F. Thisse and H. G. Zoller, North Holland, Amsterdam, 1983, 413-429.